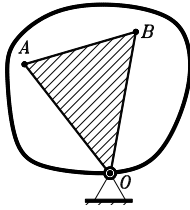


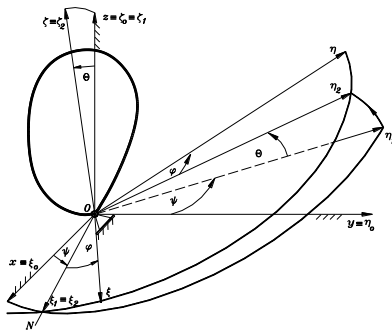
Sferno kretanje tela (Obrtanje tela oko nepokretne tačke)

Sferno kretanje tela ili obrtanje tela oko nepokretne tačke je takvo kretanje tela koje ima jednu nepokretnu tačku. Položaj tela u prostoru može biti jednoznačno određen položajem triju njegovih tačaka koje ne pripadaju istoj pravoj. Kada je u pitanju telo koje vrši sferno kretanje, treba zapaziti da su od šest koordinata tačaka A i B nezavisne samo tri zbog postojanja tri relacije koje se mogu uspostaviti između koordinata tih tačaka, a koje govore o nepromenljivosti dužina \overline{OA} , \overline{OB} i \overline{AB} . Dakle, telo koje vrši sferno kretanje ima 6-3 nezavisnih koordinata, tj. tri stepena slobode kretanja. Jedan od postupaka za analizu sfernog kretanja tela je Ojlerov postupak.



Ojlerov postupak podrazumeva korišćenje dva Dekartova pravouglata koordinatna sistema: $Oxyz$ – nepokretan i $O\xi\eta\zeta$ – pokretan sistem, kruto vezan za posmatrano telo. Kretanje tela tada je u potpunosti opisano kretanjem pokretnog u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Neka se u početnom trenutku oba koordinatna sistema poklapaju ($Ox \equiv O\xi_o$, $Oy \equiv O\eta_o$ i $Oz \equiv O\zeta_o$).

Polazeći od tog početnog položaja, do proizvoljnog položaja pokretnog koordinatnog sistema dolazi se ako se izvrše tri nezavisna obrtanja.



1) Prvo se izvrši obrtanje koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ oko ose $Oz \equiv O\zeta_o$ za ugao ψ - ugao precesije. Na taj način, pokretni koordinatni sistem iz položaja $O\xi_o\eta_o\zeta_o$ prelazi u položaj $O\xi_1\eta_1\zeta_1$.

2) Sledeće obrtanje koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ vrši se oko ose $O\xi_1 \equiv O\xi_2 \equiv ON$, kao nepokretne, za ugao θ - ugao nutacije. Na taj način, pokretni koordinatni sistem prelazi u položaj $O\xi_2\eta_2\zeta_2$. Osa ON oko koje je izvršena ova rotacija naziva se čvorna osa.

3) Poslednje obrtanje vrši se oko ose $O\xi_2 \equiv O\xi$ za ugao φ - ugao sopstvene rotacije.

Na taj način dobija se proizvoljni položaj pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$. Smatraće se da su Ojlerovi uglovi pozitivni ako se uočena obrtanja posmatrana sa pozitivnih krajeva osa Oz , ON i $O\xi$ vide kao matematički pozitivna. U toku obrtanja tela oko nepokretne tačke menjaju se Ojlerovi uglovi ψ , θ i φ . Jednačine

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

nazivaju se konačne jednačine sfernog kretanja tela.

Brzina tačke tela pri sfernom kretanju. Vektor trenutne ugaone brzine. Jednačina trenutne ose obrtanja

Vektor brzine \vec{V} tačke M tela koje vrši sferno kretanje može se odrediti korišćenjem vektora položaja \vec{r} uočene tačke, koji je izražen preko komponentata paralelnih jediničnim vektorima $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, tj.

$$\vec{r} = \xi \vec{\lambda} + \eta \vec{\mu} + \zeta \vec{\nu},$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{\xi} \vec{\lambda} + \xi \dot{\vec{\lambda}} + \dot{\eta} \vec{\mu} + \eta \dot{\vec{\mu}} + \dot{\zeta} \vec{\nu} + \zeta \dot{\vec{\nu}}.$$

Osim toga, vektor brzine \vec{V} tačke M tela može se izraziti i u obliku

$$\vec{V} = V_\xi \vec{\lambda} + V_\eta \vec{\mu} + V_\zeta \vec{\nu},$$

$$\vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} + (\vec{V} \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu} + (\vec{V} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu},$$

$$\begin{aligned} \vec{V} = & (\xi \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\lambda} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\lambda} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\lambda}) \vec{\lambda} + \\ & + (\xi \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mu} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\mu}) \vec{\mu} + \\ & + (\xi \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\nu} + \eta \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\nu} + \zeta \dot{\vec{\nu}} \cdot \vec{\nu}) \vec{\nu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} &= 1, & \vec{\mu} \cdot \vec{\mu} &= 1, & \vec{v} \cdot \vec{v} &= 1, \\
 \vec{\lambda} \cdot \vec{\mu} &= 0, & \vec{\mu} \cdot \vec{v} &= 0, & \vec{v} \cdot \vec{\lambda} &= 0, \\
 \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\lambda} &= 0, & \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\mu} &= 0, & \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} &= 0, \\
 \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} &= -\dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{\lambda}, & \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} &= -\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\mu}, & \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} &= -\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{v}, \\
 \vec{V} &= (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} \zeta - \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} \eta) \vec{\lambda} + \\
 &+ (\dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} \xi - \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} \zeta) \vec{\mu} + \\
 &+ (\dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} \eta - \dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} \xi) \vec{v}.
 \end{aligned}$$

Ako se uvedu oznake

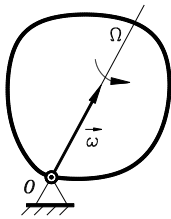
$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{\lambda} = \omega_\eta, \dot{\vec{\lambda}} \cdot \vec{\mu} = \omega_\xi, \dot{\vec{\mu}} \cdot \vec{v} = \omega_\zeta,$$

tada je

$$\begin{aligned}
 \vec{V} &= (\omega_\eta \zeta - \omega_\xi \eta) \vec{\lambda} + \\
 &+ (\omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta) \vec{\mu} + \\
 &+ (\omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi) \vec{v}, \quad \vec{V} = \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \vec{\omega} = \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{v}, \quad \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}.
 \end{aligned}$$

Ako se pođe od uslova

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{v} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = 0, \quad \omega_\eta \zeta - \omega_\xi \eta = 0, \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta = 0, \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi = 0,$$



$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta},$$

-trenutna osa obrtanja i obeležava sa OQ .

Vodeći računa o kolinearnosti vektora $\vec{\omega}$ i trenutne ose obrtanja, zaključuje se da je trenutni raspored brzina tačaka tela koje vrši sferno kretanje isti kao da se telo obrće oko, u tom trenutku nepokretne trenutne ose. Ovo zapažanje može se uzeti kao osnova za uvođenje naziva za vektor $\vec{\omega}$ - vektor trenutne ugaone brzine.

Ojlerove kinematičke jednačine

Za određivanje trenutne ugaone brzine tela koje vrši sferno kretanje polazi se od toga da se položaj tela može odrediti pomoću tri Ojlerova ugla. Tada je položaj tela poznat u svakom trenutku ako su poznate konačne jednačine sfernog kretanja tela $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Neka su uočena dva položaja tela koje vrši sferno kretanje, koji odgovaraju trenucima t i $t + \Delta t$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}
 t &: \quad \psi \quad \theta \quad \varphi \\
 t + \Delta t &: \quad \psi + \Delta\psi \quad \theta + \Delta\theta \quad \varphi + \Delta\varphi
 \end{aligned}$$

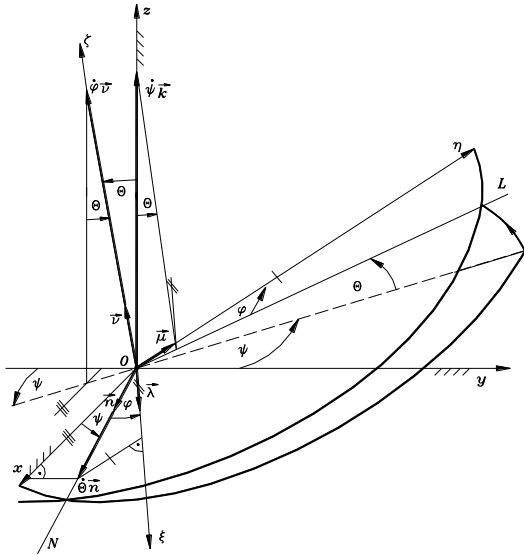
Odgovarajuće srednje ugaone brzine za dati interval vremena određene su izrazima $\frac{\Delta\psi}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

Granične vrednosti ovih srednjih ugaonih brzina predstavljaju odgovarajuće trenutne ugaone brzine:

$$\begin{aligned}
 - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} &= \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} \quad - \text{ugaona brzina precesije,} \\
 - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} &= \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad - \text{ugaona brzina nutacije,} \\
 - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} &= \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad - \text{ugaona brzina sopstvene rotacije.}
 \end{aligned}$$

Vektori ugaonih brzina precesije $\vec{\omega}_p = \dot{\psi} \vec{k}$, nutacije $\vec{\omega}_n = \dot{\theta} \vec{n}$ i sopstvene rotacije $\vec{\omega}_{sr} = \dot{\varphi} \vec{v}$ usmereni su duž osa Oz , ON i $O\xi$, čiji su jedinični vektori \vec{k} , \vec{n} i \vec{v} , respektivno. Imajući u vidu da se ove ose seku u jednoj tački, vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, tela koje vrši sferno kretanje, može se pisati u obliku

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_p + \vec{\omega}_n + \vec{\omega}_{sr} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{v}.$$



Kako je

$$\vec{k} = \sin \theta \sin \varphi \vec{\lambda} + \sin \theta \cos \varphi \vec{\mu} + \cos \theta \vec{\nu},$$

$$\vec{n} = \cos \varphi \, \vec{\lambda} - \sin \varphi \, \vec{\mu} + 0 \, \vec{\nu}.$$

dobija se

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = & (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) \vec{\lambda} + \\ & + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) \vec{\mu} + \\ & + (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \vec{\nu}.\end{aligned}$$

$$\omega_{\xi} = \vec{\omega} \cdot \vec{\lambda} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$\omega_\eta = \vec{\omega} \cdot \vec{\mu} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_\zeta = \vec{\omega} \cdot \vec{v} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.$$

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta},$$

$$\cos \angle(\vec{\omega}, \vec{\lambda}) = \frac{\omega_{\xi}}{\omega}, \quad \cos \angle(\vec{\omega}, \vec{\mu}) = \frac{\omega_{\eta}}{\omega},$$

$$\cos \angle(\vec{\omega}, \vec{V}) = \frac{\omega_{\zeta}}{\omega}.$$

$$\vec{n} = \cos \psi \vec{i} + \sin \psi \vec{j} + 0 \vec{k},$$

$$\vec{v} = \sin \theta \sin \psi \vec{i} - \sin \theta \cos \psi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}.$$

$$\begin{aligned}\vec{\omega} = & (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \vec{i} + \\ & + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \vec{j} + \\ & + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{k}.\end{aligned}$$

$$\omega_x = \vec{\omega} \cdot \vec{i} = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \quad \omega_y = \vec{\omega} \cdot \vec{j} = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \quad \omega_z = \vec{\omega} \cdot \vec{k} = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta},$$

$$\cos \angle(\vec{w}, \vec{i}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \cos \angle(\vec{w}, \vec{j}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \cos \angle(\vec{w}, \vec{k}) = \frac{\omega_z}{\omega}$$

Trenutno ugaono ubrzanje tela koje vrši sferno kretanje

Neka je poznat vektor trenutne ugaone brzine $\vec{\omega}$ tela koje vrši sferno kretanje. Vektor trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ tela koje vrši sferno kretanje određen je kao

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}.$$

Ako se sa $\vec{\omega}_o$ označi jedinični vektor trenutne ose obrtanja $O\Omega$, tada se može pisati da je

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}_0,$$

gde je sa ω označen intenzitet vektora $\vec{\omega}$. Tada sledi

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d}{dt}(\omega \vec{\omega}_o) = \dot{\omega} \vec{\omega}_o + \omega \dot{\vec{\omega}}_o,$$

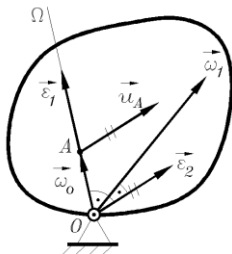
$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2.$$

Pri tome je $\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\omega} \vec{\omega}_o$ - komponenta trenutnog ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ koja govori o promeni intenziteta vektora trenutne ugaone brzine i pravca je ose $O\Omega$. Pri analizi komponente $\vec{\varepsilon}_2$ treba zapaziti da je vektor $\vec{\omega}_o$ konstantnog intenziteta i da je kraj ovog vektora, tačka A , na trenutnoj osi obrtanja $O\Omega$. Njegov izvod po vremenu predstavlja brzinu \vec{u}_A , tačke A koja je određena sa

$$\vec{u}_A = \frac{d\vec{\omega}_0}{dt} = \dot{\vec{\omega}}_0.$$

Ako je sa $\vec{\omega}_1$ označena ugaona brzina obrtanja vektora $\vec{\omega}_0$, brzina kraja vektora $\vec{\omega}_0$ može se odrediti kao $\dot{\vec{\omega}}_0 = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_0$, tj.

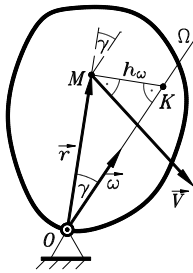
$$\vec{\varepsilon}_2 = \omega(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_o) = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}.$$



Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{v}, \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{v} + \omega_\xi \dot{\vec{\lambda}} + \omega_\eta \dot{\vec{\mu}} + \omega_\zeta \dot{\vec{v}}, \\ \dot{\vec{\lambda}} &= \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}, \quad \dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}, \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{v} + \omega_\xi (\vec{\omega} \times \vec{\lambda}) + \omega_\eta (\vec{\omega} \times \vec{\mu}) + \omega_\zeta (\vec{\omega} \times \vec{v}), \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{v} + \vec{\omega} \times (\omega_\xi \vec{\lambda} + \omega_\eta \vec{\mu} + \omega_\zeta \vec{v}), \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{\omega}, \quad \vec{\varepsilon} = \dot{\omega}_\xi \vec{\lambda} + \dot{\omega}_\eta \vec{\mu} + \dot{\omega}_\zeta \vec{v}. \\ \vec{\omega} &= \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \\ \vec{\varepsilon} &= \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_x \vec{i} + \dot{\omega}_y \vec{j} + \dot{\omega}_z \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k}.\end{aligned}$$

Projekcije brzine tačke tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema



Polazeći od izraza za brzinu tačke tela koje vrši sferno kretanje može se intenzitet brzine V , proizvoljne tačke M tela, odrediti u obliku

$$V = \omega r \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega r \sin \gamma = \omega h_\omega,$$

gde je $h_\omega = \overline{MK} = r \sin \gamma$ rastojanje tačke M od trenutne ose obrtanja. Pravac vektora \vec{V} normalan je na $\vec{\omega}$ i \vec{r} (a time i na h_ω), a orijentisan je na onu stranu odakle se obrtanje vektora $\vec{\omega}$, najkraćim putem, do poklapanja sa vektorom \vec{r} vidi kao matematički pozitivno.

Ako se vektor brzine \vec{V} određuje preko njegovih projekcija V_ξ , V_η i V_ζ , na ose pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$, tj.

$$\vec{V} = V_\xi \vec{\lambda} + V_\eta \vec{\mu} + V_\zeta \vec{v},$$

tada sledi da je

$$\begin{aligned}V_\xi &= \vec{V} \cdot \vec{\lambda} = \omega_\eta \zeta - \omega_\zeta \eta, \\ V_\eta &= \vec{V} \cdot \vec{\mu} = \omega_\zeta \xi - \omega_\xi \zeta, \\ V_\zeta &= \vec{V} \cdot \vec{v} = \omega_\xi \eta - \omega_\eta \xi.\end{aligned}$$

$$V = \sqrt{V_\xi^2 + V_\eta^2 + V_\zeta^2}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{\lambda}) = \frac{V_\xi}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{\mu}) = \frac{V_\eta}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{v}) = \frac{V_\zeta}{V}.$$

Na isti način može se odrediti intenzitet, pravac i smer vektora brzine \vec{V} , tačke tela koje vrši sferno kretanje, preko projekcija V_x , V_y i V_z na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$,

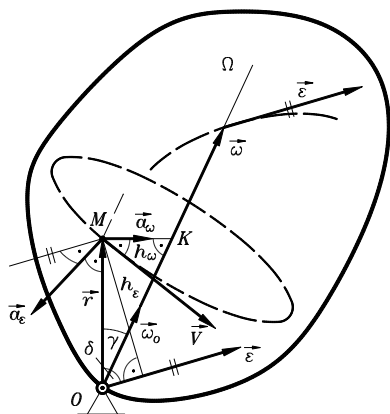
$$\begin{aligned}\vec{V} &= V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}, \quad \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \\ V_x &= \vec{V} \cdot \vec{i} = \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y &= \vec{V} \cdot \vec{j} = \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z &= \vec{V} \cdot \vec{k} = \omega_x y - \omega_y x. \\ V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}.\end{aligned}$$

Jednačina trenutne ose obrtanja, tela koje vrši sferno kretanje, u odnosu na ose nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ je

$$\begin{aligned}\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0, \quad \omega_y z - \omega_z y = 0, \quad \omega_z x - \omega_x z = 0, \quad \omega_x y - \omega_y x = 0, \\ \frac{x}{\omega_x} &= \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.\end{aligned}$$

Ubrzanje tačke tela koje vrši sferno kretanje

Ubrzanje proizvoljne tačke M tela koje vrši sferno kretanje je



$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}},$$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

$$a_{\varepsilon} = \varepsilon r \sin \angle(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = \varepsilon r \sin \delta = \varepsilon h_{\varepsilon},$$

gde je $h_{\varepsilon} = r \sin \delta$ rastojanje tačke M od pravca vektora trenutnog ugaonog ubrzanja. Ova komponenta ubrzanja tačke tela koje vrši sferno kretanje naziva se obrtno ubrzanje.

$$\vec{a}_{\varepsilon} = (\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) \times \vec{r} = \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\varepsilon}_2 \times \vec{r},$$

$$\vec{a}_{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \times \vec{r} = \vec{a}_{\varepsilon_1} + \vec{a}_{\varepsilon_2}.$$

Pri tome je $a_{\varepsilon_1} = \varepsilon_1 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_1, \vec{r})$. Pravac vektora \vec{a}_{ε_1} normalan je na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\varepsilon}_1$ i \vec{r} , a smer je određen datim vektorskim proizvodom. Intenzitet vektora \vec{a}_{ε_2} dat je sa

$a_{\varepsilon_2} = \varepsilon_2 r \sin \angle(\vec{\varepsilon}_2, \vec{r})$, pravac je normalan na ravan koju obrazuju vektori $\vec{\varepsilon}_2$ i \vec{r} , a smer neposredno sledi iz datog vektorskog proizvoda.

Intenzitet druge komponente ubrzanja $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ tačke tela koje vrši sferno kretanje, koja će biti označena sa \vec{a}_{ω} , određen je izrazom

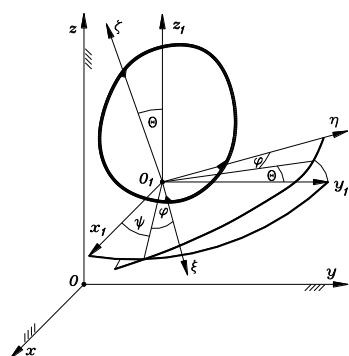
$$a_{\omega} = \omega V \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{V}) = \omega V \sin 90^\circ = h_{\omega} \omega^2,$$

gde je $h_{\omega} = \overline{MK} = r \sin \gamma$ rastojanje tačke M od trenutne ose obrtanja $O\Omega$. Pravac vektora \vec{a}_{ω} normalan je na ravan koju obrazuju $\vec{\omega}$ i \vec{V} i upravan je na trenutnu osu obrtanja $O\Omega$. Smer vektora \vec{a}_{ω} je onaj odakle se rotacija vektora $\vec{\omega}$ najkraćim putem do poklapanja sa vektorom \vec{V} vidi kao matematički pozitivna, tj. uvek je usmeren ka osi obrtanja. Ova komponenta ubrzanja tačke tela koje vrši sferno kretanje naziva se aksipetalno ubrzanje. Kada su poznate komponente \vec{a}_{ε} i \vec{a}_{ω} , intenzitet vektora ubrzanja proizvoljne tačke tela koje vrši sferno kretanje određen je npr. na osnovu kosinusne teoreme sa

$$a = \sqrt{a_{\varepsilon}^2 + a_{\omega}^2 + 2a_{\varepsilon}a_{\omega} \cos \angle(\vec{a}_{\varepsilon}, \vec{a}_{\omega})}.$$

Opšte kretanje tela

Jednačine opšteg kretanja slobodnog tela



Opšte kretanje slobodnog tela je takvo kretanje pri kome telo može da zauzme proizvoljan položaj u prostoru. Slobodno telo koje vrši opšte kretanje ima šest stepeni slobode kretanja, odnosno njegov položaj određen je sa šest generalisanih koordinata. Konačne jednačine opšteg kretanja slobodnog krutog tela date su u obliku

$$x_{O_1} = f_1(t), \quad y_{O_1} = f_2(t), \quad z_{O_1} = f_3(t),$$

$$\psi = f_4(t), \quad \theta = f_5(t), \quad \varphi = f_6(t).$$

Pretpostavlja se da su funkcije f_i ($i=1,2,3, \dots, 6$) neprekidne, jednoznačne i najmanje dva puta diferencijabilne.

Brzina tačke tela koje vrši opšte kretanje

Za proizvoljnu tačku M tela važi

$$\vec{r}_M = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho}_M,$$

gde je sa \vec{r}_{O_1} određen položaj proizvoljno izabranog pola translacije O_1 i gde je sa $\vec{\rho}_M$ određen položaj tačke M u odnosu na pol O_1 . Tada je

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_{O_1} + \dot{\vec{\rho}}_M, \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_M^{O_1}, \quad \vec{V}_M^{O_1} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M = \vec{\omega} \times \overline{O_1M}, \quad \vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_M.$$

Ubrzanje tačke tela koje vrši opšte kretanje

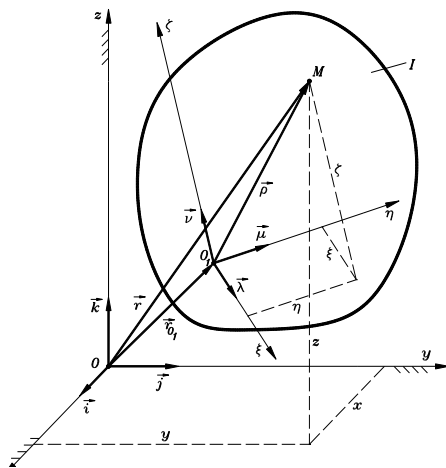
Ubrzanje proizvoljne tačke M posmatranog tela je

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \dot{\vec{V}}_{O_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M.$$

- $\dot{\vec{V}}_{O_1} = \vec{a}_{O_1}$ - ubrzanje pola translacije,
 - $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M = \vec{a}_\varepsilon$ - obrtno ubrzanje tačke M ,
 - $\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_M = \vec{\omega} \times \vec{V}_M^{O_1} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = \vec{a}_\omega$ - aksipetalno ubrzanje tačke M ,
- $$\vec{a}_M = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_M^{O_1}.$$

Složeno kretanje tačke

Relativno, prenosno i apsolutno kretanje tačke



Za proučavanje složenog kretanja tačke potrebno je neko pokretno telo I i tačka M koja se kreće po njemu. Kretanje tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ naziva se apsolutno kretanje i određeno je parametarskim jednačinama kretanja

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

ili $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Brzina i ubrzanje tačke M u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$ naziva se apsolutna brzina, odnosno apsolutno ubrzanje tačke M . Kretanje tačke M u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_1\xi\eta\zeta$, naziva se relativno kretanje i određeno je sledećim parametarskim jednačinama

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \zeta = \zeta(t),$$

što se može izraziti u sledećem vektorskom obliku

$$\vec{\rho} = \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}.$$

Kretanje tačke tela I , sa kojom se u datom trenutku poklapa tačka M , naziva se prenosno kretanje. Prenosna brzina i prenosno ubrzanje tačke su brzina i ubrzanje one tačke tela I

sa kojom se posmatrana tačka poklapa u datom trenutku.

Brzina tačke pri složenom kretanju (apsolutna brzina tačke)

Položaj tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Oxyz$ određen je sa

$$\vec{r} = \vec{r}_{O_1} + \vec{\rho} = \vec{r}_{O_1} + \xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu},$$

gde je $\vec{r}_{O_1} = \vec{OO_1}$ a $\vec{\rho} = \vec{O_1M}$. Tada je

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{O_1} + \dot{\vec{\rho}},$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu} + \xi\dot{\vec{\lambda}} + \eta\dot{\vec{\mu}} + \zeta\dot{\vec{\nu}}.$$

Prva tri člana na desnoj strani prethodnog izraza karakterišu brzinu promene vektora $\vec{\rho}$ u odnosu na pokretni koordinatni sistem $O_1\xi\eta\zeta$. Taj deo izvoda po vremenu $\dot{\vec{\rho}}$ predstavlja lokalni (relativni) izvod po vremenu vektora $\vec{\rho}$, odnosno relativnu brzinu tačke M , tako da važi

$$\vec{V}_r = \frac{d_r \vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\vec{\lambda} + \dot{\eta}\vec{\mu} + \dot{\zeta}\vec{\nu}.$$

Preostala tri člana u izrazu za $\dot{\vec{\rho}}$ karakterišu promenu vektora $\vec{\rho}$ koja je posledica kretanja koordinatnog sistema $O_1\xi\eta\zeta$ u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$. Izvodi po vremenu jediničnih vektora $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ određeni su na sledeći način

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu},$$

gde je $\vec{\omega}$ vektor trenutne ugaone brzine obrtanja tela I oko uslovno nepokretne tačke O_1 . Zamenom ovih relacija dobija se

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \xi(\vec{\omega} \times \vec{\lambda}) + \eta(\vec{\omega} \times \vec{\mu}) + \zeta(\vec{\omega} \times \vec{\nu}), \quad \dot{\vec{\rho}} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times (\xi\vec{\lambda} + \eta\vec{\mu} + \zeta\vec{\nu}),$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \frac{d_r \vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Apsolutna brzina tačke M može se sada izraziti kao $\vec{V} = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{V}_r$. Ako se tačka M ne kreće po telu I , tada je $\vec{V}_r = 0$ i prethodni izraz svodi se tada na prenosnu brzinu tačke M

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{o_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Prethodnim izrazom određena je brzina one tačke tela I , koje vrši opšte kretanje, sa kojom se u datom trenutku poklapa tačka M . Iz svega prethodnog proizilazi da je apsolutna brzina tačke M jednaka zbiru prenosne i relativne brzine, tj.

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_r.$$

Intenzitet, pravac i smer apsolutne brzine određen je, npr. projekcijama na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$, tj.

$$V_x = V_{px} + V_{rx}, \quad V_y = V_{py} + V_{ry}, \quad V_z = V_{pz} + V_{rz}.$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos \angle(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}.$$

Ubrzanje tačke pri složenom kretanju (apsolutno ubrzanje tačke)

Izraz za apsolutno ubrzanje tačke M koja se kreće po telu I nalazi se određivanjem izvoda po vremenu izraza za apsolutnu brzinu tačke M , tj.

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}_{o_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{V}}_r,$$

pri čemu je $\dot{\vec{V}}_{o_1} = \vec{a}_{o_1}$ - ubrzanje pola translacije, $\dot{\vec{\omega}} = \vec{\varepsilon}$ - prenosno ugaono ubrzanje tj. ugaono ubrzanje tela I . Analogno izrazu za brzinu može se pisati

$$\dot{\vec{V}}_r = \frac{d_r \vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r, \quad \vec{a}_r = \frac{d_r \vec{V}_r}{dt} = \frac{d_r^2 \vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\xi} \vec{\lambda} + \ddot{\eta} \vec{\mu} + \ddot{\zeta} \vec{v}.$$

Relativno ubrzanje \vec{a}_r tačke M govori o promeni relativne brzine \vec{V}_r usled relativnog kretanja. Kada koordinatni sistem $O_1\xi\eta\zeta$ miruje, tj. kada se telo I ne kreće, sledi da je

$$\vec{a} = \vec{a}_r.$$

Na osnovu prethodno rečenog, izraz za apsolutno ubrzanje tačke M moguće je napisati u obliku

$$\vec{a} = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r, \quad \vec{a} = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Kada tačka M ne vrši relativno kretanje, tj. $\vec{V}_r = 0$ i $\vec{a}_r = 0$, prethodni izraz svodi se na prenosno ubrzanje tačke M

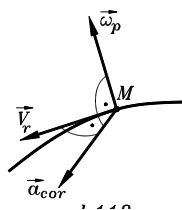
$$\vec{a}_p = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}), \quad \vec{a}_p = \vec{a}_{o_1} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_M^{o_1}.$$

Izraz $2\vec{\omega} \times \vec{V}_r$ naziva se Koriolisovo ubrzanje tačke M , obeležava se sa \vec{a}_{cor} , tj.

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Intenzitet vektora \vec{a}_{cor} određen je sa $a_{cor} = 2\omega V_r \sin \angle(\vec{\omega}, \vec{V}_r)$. Očigledno je da je Koriolisovo ubrzanje \vec{a}_{cor} jednako nuli u sledećim slučajevima:

1) $\omega = 0$, tj. kada se telo po kome se kreće tačka, kreće translatorno; 2) $V_r = 0$, tj. kada se tačka ne kreće relativno; 3) $\vec{\omega} \parallel \vec{V}_r$, tj. kada su vektori trenutne ugaone brzine tela po kome se kreće tačka i relativne brzine tačke paralelni.



Pravac vektora Koriolisovog ubrzanja \vec{a}_{cor} upravan je na ravan koju obrazuju vektori trenutne ugaone brzine tela po kome se kreće tačka $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}_p$ i relativne brzine tačke \vec{V}_r , a smer je takav da se posmatrano sa kraja vektora \vec{a}_{cor} obrtanje vektora $\vec{\omega}$ najkraćim putem do poklapanja sa vektorom \vec{V}_r , vidi kao matematički pozitivno. Na osnovu prethodnog proizilazi da je apsolutno ubrzanje tačke M jednako zbiru prenosnog, relativnog i Koriolisovog ubrzanja, tj.

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}.$$

Intenzitet, pravac i smer vektora apsolutnog ubrzanja tačke M može se odrediti pomoću projekcija na ose nepokretnog Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema $Oxyz$, tj.

$$a_x = a_{px} + a_{rx} + a_{corx}, \quad a_y = a_{py} + a_{ry} + a_{cory}, \quad a_z = a_{pz} + a_{rz} + a_{corz}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}.$$